

2ª LISTA DE MECÂNICA QUÂNTICA I - PG
(2015-1)

1. Considere o problema da precessão de uma partícula de spin $1/2$ na representação de Heisenberg. A precessão na presença de um campo magnético $\vec{B} = B \hat{z}$ é descrita pela Hamiltoniano

$$H = \left(\frac{e B}{m c} \right) S_z = \omega S_z .$$

Obtenha as equações de movimento para os operadores S_x, S_y e S_z como função do tempo e resolva-as.

2. Calcule $[X(t), X(0)]$ para uma partícula livre em uma dimensão na representação de Heisenberg.
3. Considere o pacote de onda de uma partícula livre em uma dimensão. Suponha que em $t = 0$ o pacote considerado satisfaça a relação de incerteza **mínima** e que $\langle X(0) \rangle = \langle P(0) \rangle = 0$. Usando a representação de Heisenberg, obtenha o valor da variância da posição da partícula $[\Delta X(t)]^2$ como função do tempo e da variância inicial $[\Delta X(0)]^2$.
4. Seja $X(t)$ o operador posição de uma partícula em uma dimensão. Obtenha a função de correlação definida por

$$C(t) \equiv \langle X(t) X(0) \rangle$$

para uma partícula em um potencial harmônico.

5. O estado coerente de um oscilador harmônico em uma dimensão é definido como o autovetor do operador de aniquilação

$$a |v\rangle = v |v\rangle$$

onde v é um número complexo.

- (a) Mostre que

$$|v\rangle = e^{-|v|^2/2} e^{v a^\dagger} |0\rangle$$

é um estado coerente.

- (b) Mostre que $|v\rangle$ é um estado de incerteza mínima.
- (c) Decomponha $|v\rangle$ na base de Fock (autovetores de $a^\dagger a$) e mostre que $P(n) \equiv |\langle n | v \rangle|^2$ é dada pela distribuição de Poisson. Encontre o valor esperado do operador número $N \equiv a^\dagger a$ e da energia do oscilador para um estado coerente.
- (d) Mostre que um estado coerente também pode ser obtido aplicando-se o operador deslocamento $e^{-i p l / \hbar}$ ao estado fundamental do oscilador harmônico.
- (e) Obtenha a função de onda $\varphi_v(x) \equiv \langle x | v \rangle$ que representa o estado coerente na representação de posição.
- (f) Suponha que em $t = 0$ o oscilador seja preparado no estado coerente $|l\rangle$, onde $l \in \mathbb{R}$. Determine a função de onda dependente do tempo $\varphi_l(x, t)$, para $t \geq 0$.

6. Considere a função de partição da Mecânica Estatística em termos do propagador

$$Z = \int d^3 \mathbf{r}' K(\mathbf{r}', t; \mathbf{r}', 0) ,$$

onde $t = -i\hbar\beta$. Mostre que a energia do estado fundamental é dada por

$$E_f = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} .$$

Aplique este resultado a uma partícula num poço infinito de largura a .

7. (a) Escreva a expressão para a ação clássica de um oscilador harmônico simples em uma dimensão, para um intervalo de tempo finito.
- (b) Construa $\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle$ usando a prescrição de Feynman para $t_n - t_{n-1} = \Delta t$ pequeno. Mostre que a expressão encontrada está de acordo com a fórmula do propagador do oscilador harmônico até a ordem $(\Delta t)^2$.